Chapitre : Matrices et applications linéaires

1 Exemples de matrices d'applications linéaires

Exercice 1 **Matrices** –

Soient S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$S(x,y) = (2x-5y,\ -3x+4y) \quad \text{et} \quad T(x,y) = (-8y,\ 7x+y).$$

1. Déterminer les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les applications linéaires $S+T$, $S\circ T$, $T\circ S$ et $S\circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Indication ▼ Correction ▼ [3004]

Exercice 2 **AL-1** –

Soit $(\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1=(1,-2,0)$, $w_2=(-1,2,0)$, $w_3=(0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnéee des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathscr{E}_1) = w_1\ , u(\mathscr{E}_2) = w_2\ , u(\mathscr{E}_3) = w_3.$$

1. Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$. En déduire la matrice de u dans la base canonique. Soit $W=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$. En déduire la matrice de u dans la base canonique.
3. Soit $W=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
4. Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$.
5. Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$.
7. Déterminer $\ker(u-Id)$ et $\mathrm{Im}(u-Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u-Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ [872]

Exercice 3 **AL-2** –

Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B}=(\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathscr{E}_1) = -2\mathscr{E}_1+2\mathscr{E}_3\ , u(\mathscr{E}_2) = 3\mathscr{E}_2\ , u(\mathscr{E}_3) = -4\mathscr{E}_1+4\mathscr{E}_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
3. Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

Indication ▼ Correction ▼ [873]

Exercice 4 **Donnée par une matrice** –

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Indication ▼ Correction ▼ [881]

Exercice 5 ★★ **Réduction** –

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Indication ▼ Correction ▼ [882]

Exercice 6 ★★★ **Application linéaire définie sur les matrices** –

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [886]

Exercice 7 ★★★ **Matrice inverse et application linéaire sur les polynômes** –

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Indication ▼ Correction ▼ [924]

Exercice 8 ★★ **Matrice d'une transvection** –

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathscr{L}(E)$. On dit que ϕ est une transvection si $\mathrm{Im}(\phi - Id_E) \subset \ker(\phi - Id_E)$; $\ker(\phi - Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ϕ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un réel non nul.

Indication ▼ Correction ▼ [2631]

Exercice 9 ★★★ **D'un produit à l'autre** –

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Indication ▼ Correction ▼ [935]

Exercice 10 ★★★★ **Matrice à diagonale dominante** –

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Indication ▼ Correction ▼ [925]

Exercice 11 ★★★★ **Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul** –

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.

2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3122]

2 Changement de bases

Exercice 12 ★ **Changement de base** –

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Indication ▼ Correction ▼ [883]

Exercice 13 ★ **Changement de base...** –

Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $u(x,y) = (x+2y, 2x-y, 2x+3y)$ et $v(x,y,z) = (x-2y+z, 2x+y-3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x,y,z)$ et $v \circ u(x,y)$.

2. Soit $\mathscr{B}_2 = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2\}$ et $\mathscr{B}_3 = \{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathscr{B}'_2 := \{\mathscr{E}'_1, \mathscr{E}'_2\}$ et $\mathscr{B}'_3 := \{\mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2, \mathscr{F}'_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathscr{E}'_1 := \mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}'_2 := \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$, $\mathscr{F}'_1 := \mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}'_2 := \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}'_3 := \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3$.

3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}_2$ à la base $\mathscr{B}'_2$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathscr{B}_3$ à la base $\mathscr{B}'_3$.

4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}_3$ puis dans les bases $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}'_3$ et enfin celle de v dans les bases $\mathscr{B}'_3$ et $\mathscr{B}'_2$.

Indication ▼ Correction ▼ [884]

Exercice 14 ★★★ **Matrice d'une projection** –

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Indication ▼ Correction ▼ [851]

3 Rang de matrices

Exercice 15 ★ **Explicite... –**

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\textbf{1}.\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix} \qquad \textbf{2}.\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$$

$$\textbf{3}.\ C=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&4&2\\3&4&5&2\end{pmatrix} \qquad \textbf{4}.\ D=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-2&-3&0&-5\\4&9&6&7\\1&-1&-5&5\end{pmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [918]

Exercice 16 ★★ **Surjective ? –**

Soient α,β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}1&3&\alpha&\beta\\2&-1&2&1\\-1&1&2&0\end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Indication ▼ Correction ▼ [885]

Exercice 17 ★★ **Avec un paramètre –**

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\a&a^2&a^3&1\\a^2&a^3&1&a\\a^3&1&a&a^2\end{pmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [919]

Exercice 18 ★★★★ **Rang par blocs –**

Soit B la matrice diagonale par blocs

$$B=\begin{pmatrix}A_1&0&\dots&0\\0&A_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\dots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&A_n\end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de B en fonction du rang des A_i.

Indication ▼ Correction ▼ [942]

4 Matrices équivalentes

Exercice 19 ★★ **Matrices de rang r –**

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Indication ▼ Correction ▼ [932]

Exercice 20 ★★★★ **Matrices équivalentes et matrices nilpotentes** –

Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Indication ▼ Correction ▼ [933]

5 Matrices semblables

Exercice 21 ★ **Exemples de matrices semblables** –

Montrer que les matrices A, B, C et D suivantes sont semblables :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&0&0\\4&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3119]

Exercice 22 ★★ **Deux matrices semblables** –

Soit $M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de démontrer que M et D sont semblables. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1. Démontrer qu'il existe $u_1\in\mathbb{R}^3$ tel que $\text{vect}(u_1)=\ker(f-Id)$. De même, prouver l'existence de $u_2,u_{-4}\in\mathbb{R}^3$ tels que $\text{vect}(u_2)=\ker(f-2Id)$ et $\text{vect}(u_{-4})=\ker(f+4Id)$.

2. Démontrer que (u_1,u_2,u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [3121]

Exercice 23 ★★★★ **Matrices de trace nulle** –

1. Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x\in E$, la famille $(x,f(x))$ est liée.

2. Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Indication ▼ Correction ▼ [934]

6 Trace

Exercice 24 ★ **Trace du produit tensoriel de deux matrices** –

Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on définit le produit tensoriel de A et B par

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{1,1}B&\dots&a_{1,n}B\\\vdots&&\vdots\\a_{n,1}B&\dots&a_{n,n}B\end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de la matrice $A\otimes B$? Démontrer que $\text{tr}(A\otimes B)=\text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Indication ▼ Correction ▼ [2666]

Exercice 25 ★★★ **Produit et trace** –

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\text{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

Indication ▼ Correction ▼

Indication pour l'exercice 1 ▲

1.

2. On commence par faire les opérations sur les matrices.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Faire le produit de matrices.

2.

3. Faire le produit de matrices.

4. Résoudre l'équation $u(W)=0$. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, puis une base de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Résoudre l'équation $u(W)=0$. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, puis une base de $\mathrm{Im}(u)$.

6. Montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. On écrit en colonne $u(\mathscr{E}_i)$.

2. Commencer par calculer $u(x,y,z)$. Puis utiliser la caractérisation des endomorphismes injectifs.

3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(u)$? Commencer par donner une famille génératrice facile de $\mathrm{Im}(u)$, et en extraire une base !

4. Montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Calculer $f(x,y,z)$. On pourra utiliser le théorème du rang pour obtenir la dimension de l'image.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Indication pour l'exercice 6 ▲

La matrice est de taille 4×4. Il faut calculer $f(E_{1,1})$ et l'exprimer dans $E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer $(X+1)^j$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Compléter une base de $\ker(\phi - Id_E)$ dont le premier vecteur est bien choisi.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Introduire f,g les morphismes canoniquement associés à A, B. Démontrer que $(g(e_2),g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer les images des vecteurs de cette base par l'application gf.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Montrer que le noyau de A est réduit à $\{0\}$. Pour cela, considérer la ligne de $AX=0$ pour lequel $|x_i|$ est maximal.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. La dimension du noyau ne peut pas être 0 ni 3. Il reste à démontrer que cela ne peut pas être 1, par exemple en remarquant qu'alors il existe un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ qui n'est pas dans le noyau.

2. Partir de $u \in \mathrm{Im}(f)$, de sorte que $u = f(w)$. Compléter par un vecteur v bien choisi et travailler dans la base (u,v,w).

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Montrer que les familles sont libres.
2. Appliquer la formule !

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. La composition des applications correspond à la multiplication des matrices.
2. Vérifier que les familles sont libres.
3. C'est du cours. La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs.
4. Appliquer la formule du changement de base.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Trouver une base (u_1,u_2) de P, une base u_3 de D, et écrire la matrice de la projection dans (u_1,u_2,u_3). Puis changer de base.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Utiliser la méthode du pivot de Gauss, jusqu'à obtenir une matrice échelonnée.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Il suffit de chercher les valeurs de α et β pour lesquelles le rang de cette matrice est 3.

Indication pour l'exercice 17 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss, et discuter suivant $a^4 = 1$ ou non.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Calculer la dimension du noyau !

Indication pour l'exercice 19 ▲

A quoi est équivalente une matrice de rang r ?

Indication pour l'exercice 20 ▲

Une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente. On pourra utiliser que, si S est un supplémentaire de $\ker(M)$, alors M induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(M)$.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est A. Jouer sur des permutations de vecteurs de la base pour trouver que la matrice de u peut être B, C ou D.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1.
2.
3. Ne pas utiliser la formule de changement de base, mais utiliser que $f(u_1) = u_1$,....

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. On sait que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$ pour tous x, y de E. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$ en séparant les cas (x, y) libre et (x, y) liée. On pourra considérer $f(x+y)$.

2. Procéder par récurrence. Si M est la matrice d'une homothétie, c'est clair. Sinon, choisir x tel que $(x, f(x))$ est libre, et compléter en une base (f est l'application linéaire canoniquement associée à M).

Indication pour l'exercice 24 ▲

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Calculer les coefficients diagonaux de AA^T.

2. Multiplier par les matrices élémentaires $E_{i,j}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par faire les opérations sur les matrices (somme et produit) puis on en déduit l'expression de l'endomorphisme :

$$(S+T)(x,y) = (2x-13y, 4x+5y) \text{ a pour matrice } A+B = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$
$$(S\circ T)(x,y) = (-35x-21y, 28x+28y) \text{ a pour matrice } AB = \begin{pmatrix} -35 & -21 \\ 28 & 28 \end{pmatrix};$$
$$(T\circ S)(x,y) = (24x-32y, 11x-31y) \text{ a pour matrice } BA = \begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 11 & -31 \end{pmatrix};$$
$$(S\circ S)(x,y) = (19x-30y, -18x+31y) \text{ a pour matrice } A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -18 & 31 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On a $w_1 = \mathscr{E}_1 - 2\mathscr{E}_2$, $w_2 = -\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2$ et $w_3 = 2\mathscr{E}_3$. On en déduit que la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$u(W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

2. On a $w_1 = \mathscr{E}_1 - 2\mathscr{E}_2$, $w_2 = -\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2$ et $w_3 = 2\mathscr{E}_3$. On en déduit que la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$u(W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

4. On a

$$W \in \ker(u) \iff \begin{cases} x-y &= 0 \\ -2x+2y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ y &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$

On a donc $\ker(u) = \text{vect}(1,1,0)$. Le vecteur $(1,1,0)$ est une base de $\ker(u)$. Par le théorème du rang, la dimension de $\text{Im}(u)$ vérifie

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$$

ce qui donne $\dim(\text{Im}(u)) = 2$. Une famille génératrice de $\text{Im}(u)$ est donnée par (w_1, w_2, w_3). Il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments. C'est par exemple le cas de (w_1, w_3). On en déduit que (w_1, w_3) est une base de $\text{Im}(u)$. Il suffit de démontrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs précédents, il suffit de prouver que la famille $\big((1,1,0), w_1, w_3\big)$ est libre. C'est facile et laissé au lecteur.

5. On a

$$W \in \ker(u) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & 0 \\ -2x+2y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On a donc $\ker(u) = \text{vect}(1,1,0)$. Le vecteur $(1,1,0)$ est une base de $\ker(u)$. Par le théorème du rang, la dimension de $\text{Im}(u)$ vérifie

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$$

ce qui donne $\dim(\text{Im}(u)) = 2$. Une famille génératrice de $\text{Im}(u)$ est donnée par (w_1, w_2, w_3). Il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments. C'est par exemple le cas de (w_1, w_3). On en déduit que (w_1, w_3) est une base de $\text{Im}(u)$.

6. Il suffit de démontrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs précédents, il suffit de prouver que la famille $\big((1,1,0), w_1, w_3\big)$ est libre. C'est facile et laissé au lecteur.

7. On calcule $u - Id$:

$$(u-Id)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ -2x+y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(u-Id)(x,y,z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y & = & 0 \\ -2x+y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On a donc $\ker(u - Id) = \{0\}$ et donc $u - Id$ est injective. Par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}(u - Id)) = 3$. Comme $\text{Im}(u - Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a en fait $\text{Im}(u - Id) = \mathbb{R}^3$. $u - Id$ est aussi surjective. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On écrit en colonne $u(\mathscr{E}_i)$. On trouve

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par calculer $u(x,y,z)$. On a

$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-4z \\ 3y \\ 2x+4z \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(x,y,z) \in \ker(u) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x-4z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ 2x+4z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & 0 \\ z & = & z \end{array} \right.$$

On a donc $\ker(u) = \text{vect}(-2,0,1)$ et le vecteur $(-2,0,1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

3. On sait, d'après le théorème du rang, que $\text{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $\big(u(\mathscr{E}_1), u(\mathscr{E}_2), u(\mathscr{E}_3)\big)$ est une famille génératrice de Imu. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\big(u(\mathscr{E}_1), u(\mathscr{E}_2)\big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\text{Im}(u)$ qui est de dimension 2.

4. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $\big((-2,0,1),(-2,0,2),(0,3,0)\big)$ est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

Correction de l'exercice 4 ▲

Le noyau de f est l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que

$$f(x,y,z)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ -x+2y-2z &=& 0 \\ 3y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4y \\ y &=& y \\ z &=& 3y \end{array}\right.$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle de vecteur directeur $(-4,1,3)$. Par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. De plus, $f(e_1)=(1,-1,0)$ et $f(e_2)=(1,2,3)$ sont clairement indépendants. Donc $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On a

$$f(x,y,z)=0 \iff x+y-z=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& x+y \end{array}\right. .$$

$\ker(f)$ est donc un plan vectoriel, de base (u,v) avec $u=(1,0,1)$ et $v=(0,1,1)$. D'après le théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1. Il est engendré par exemple par le vecteur non nul $w=f(e_1)=(1,-3,-2)$. On remarque que $w=u-3v$ est élément de $\ker(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)\subset\ker(f)$ et donc $f^2=0$. Par suite, $f^n=0$ pour tout $n\geq 2$ et la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est elle aussi nulle. Donc $M^n=0$ pour tout $n\geq 2$.

Correction de l'exercice 6 ▲

La preuve de la linéarité de f est laissée au lecteur. Rappelons que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est la base $(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ avec

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer l'image par f de ces matrices, et de les exprimer dans la base canonique. Mais on a

$$f(E_{1,1})=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}=-1E_{1,1}+0E_{1,2}+1E_{2,1}+0E_{2,2},$$

$$f(E_{1,2})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}=0E_{1,1}-1E_{1,2}+0E_{2,1}+1E_{2,2},$$

$$f(E_{2,1})=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=2E_{1,1}+0E_{1,2}+0E_{2,1}+0E_{2,2},$$

$$f(E_{2,2})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=0E_{1,1}+2E_{1,2}+0E_{2,1}+0E_{2,2}.$$

La matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&-1&0&2\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. D'après la formule du binôme, pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

A est donc la matrice des vecteurs $(X+1)^j$ dans la base $1, X, \ldots, X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Autrement dit, c'est la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Le fait que le coefficient qui apparaît est $\binom{j-1}{i-1}$ et non $\binom{j}{i}$ est dû au fait que l'on commence par $1 = X^0$. Ainsi, la j-ième colonne correspond à $(X+1)^{j-1}$.

2. f est inversible, d'inverse $g(P) = P(X-1)$. On en déduit que A est inversible, et que son inverse est la matrice notée B de g dans la base canonique. Développant $(X-1)^j$, on a $b_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$ pour $i \leq j$, $b_{i,j} = 0$ sinon.

Correction de l'exercice 8 ▲

On commence par remarquer que, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(\phi - Id_E)$ est de dimension 1. Soit u_1 un vecteur non nul de ce sous-espace. Il est aussi élément de $\ker(\phi - Id_E)$. Par le théorème de la base incomplète, on complète la famille libre (u_1) en une base $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de $\ker(\phi - Id_E)$. On considère enfin $v \neq 0$ un vecteur qui n'est pas dans $\ker(\phi - Id_E)$, de sorte que $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ est une base de E. Étudions la matrice de ϕ dans cette base. D'une part, pour $i = 1, \ldots, n-1$, on a $\phi(u_i) = u_i$ et les $n-1$ dernières colonnes sont bien les colonnes demandées. D'autre part, on a $\phi(v) - v \in \mathrm{Im}(\phi - Id_E)$ et donc il existe $\alpha \neq 0$ (puisque $v \notin \ker(\phi - Id_E)$) tel que $\phi(v) - v = \alpha u_1$, c'est-à-dire $\phi(v) = v + \alpha u_1$. La première colonne est donc elle aussi conforme à ce que l'on voulait.

Correction de l'exercice 9 ▲

On note f et g les applications linaires de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pour f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ pour g, canoniquement associées à A et B. Alors, on sait que

$$f \circ g(e_2) = e_2, \; f \circ g(e_3) = e_3.$$

Il vient

$$g \circ f(g(e_2))) = g(e_2) \text{ et } g \circ f(g(e_3)) = g(e_3).$$

De plus, $(g(e_2), g(e_3))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. En effet, si on a

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0,$$

on compose par f et on trouve que $ae_2 + be_3 = 0$, d'où $a = b = 0$. Ainsi, $(g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et gf laisse invariant les vecteurs de cette base. Autrement dit, $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{R}^2$ et $BA = I_2$.

Correction de l'exercice 10 ▲

On va prouver que le noyau de A est réduit à $\{0\}$. Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas et choisissons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker A$, X non-nul. Soit i tel que $|x_i| = \max(|x_j|, j = 1, \ldots, n) > 0$. Alors la i-ème ligne de $AX = 0$ se réécrit en

$$a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j.$$

Mais,

$$\left|\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}x_i|$$

ce qui est une contradiction. Donc A est inversible.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Remarquons d'abord que $\dim(\ker(f)) \neq 0$, sinon f serait un automorphisme et on n'aurait pas $f^2 = 0$, et que $\dim(\ker(f)) \neq 3$, sinon f serait l'endomorphisme nul. On va exclure le cas $\dim(\ker(f)) = 1$ en effectuant un raisonnement par l'absurde : si $\dim(\ker(f)) = 1$, alors soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$. On sait par le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Comme $\dim(S) = 2$, il existe $y \in \mathrm{Im}(f) \cap S$ avec $y \neq 0$. Mais $f(y) \neq 0$ (car $y \in S\backslash\{0\}$) et $y = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^3$. Donc $f^2(x) \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. Finalement, on a démontré que $\dim(\ker(f)) = 2$.

2. Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$, $u \neq 0$. On sait qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = u$. On sait d'autre part que $u \in \ker(f)$. On peut compléter (u) en une base (u,v) de $\ker(f)$. Alors (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si a,b,c sont des réels tels que $au+bv+cw = 0$, appliquons f : on trouve

$$af(u)+bf(v)+cf(w) = 0 \iff cu = 0 \iff c = 0$$

puis de $au+bv = 0$, on tire $a = b = 0$ puisque (u,v) est une base de $\ker(f)$. Ainsi, (u,v,w) est une famille libre de 3 vecteurs, donc une base, de $\mathbb{R}^3$. De plus, de $f(u) = f(v) = 0$, $f(w) = u$, on tire que la matrice de f dans la base (u,v,w) a exactement la forme demandée.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Puisqu'on a des familles de trois (respectivement deux) vecteurs dans un espace de dimension trois (resp. deux), il suffit de prouver que l'on a des familles libres. Pour (f_1', f_2') c'est clair puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour (e_1', e_2', e_3'), si on a une égalité du type $ae_1' + be_2' + ce_3' = 0$, alors on obtient

$$(b+c)e_1 + (a+c)e_2 + (a+b)e_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b+c & = & 0 \\ a+c & = & 0 \\ a+b & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0.$$

La famille (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons P la matrice de passage de (e_1,e_2,e_3) à (e_1',e_2',e_3') et Q la matrice de passage de (f_1,f_2) à (f_1',f_2'). Alors on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si B est la matrice de u dans les nouvelles bases, alors la formule du changement de base nous dit que $B = Q^{-1}AP$. Or,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Remarquons d'abord que u et v sont clairement linéaires. Notons A (resp. B) les matrices de u (resp. v) dans leur base canonique. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$u \circ v$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel AB. $v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel BA. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u\circ v(x)=(5x-5z,-5y+5z,8x-y-7z) \text{ et } v\circ u(x,y)=(-x+7y,-2x-6y).$$

2. Il suffit de vérifier que les deux familles sont libres, puisqu'elles comptent le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace. Pour $\mathscr{B}'_2$, c'est clair puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour $\mathscr{B}'_3$, on traduit une égalité du type $a\mathscr{F}'_1+b\mathscr{F}'_2+c\mathscr{F}'_3=0$ en

$$(a+b+c)\mathscr{F}_1+(b+c)\mathscr{F}_2+c\mathscr{F}_3=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\\ c &=& 0\end{array}\right. \iff a=b=c=0.$$

3. La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs. On a donc :

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} \text{ et } Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

4. Notons C la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}_3$. Comme on ne change la base que au départ, la formule de changement de base nous donne

$$C=AP=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Notons D la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}'_3$. Cette fois, on change de base à la fois au départ et à l'arrivée. La formule de changement de base nous donne $D=Q^{-1}AP$. Après calculs, on trouve

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}-1&-4\\0&4\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Notons enfin E la matrice de v dans les nouvelles bases. La formule de changement de base nous donne $E=P^{-1}BQ$ (attention à la place de P et Q ! ! !). On obtient après calculs :

$$P^{-1}=P \text{ et } E=\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&-3&0\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On commence par chercher une base de P et une base de D. On a

$$(x,y,z)\in P \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& y\\ z &=& x-y\end{array}\right.$$

Autrement dit, si on pose $u=(1,0,1)$ et $v=(0,1,-1)$, alors (u,v) est une base de P. On cherche ensuite une base (ici, un vecteur directeur) de D. Clairement, $w=(1,-1,1)$ convient. Puisque P et D sont supplémentaires, (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la projection dans cette base est :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w), alors la matrice recherchée est QAQ^{-1}. Or, on peut écrire Q directement,

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

et, après calculs, on obtient

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\ QAQ^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

1. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3-2L_2\end{matrix}.\end{aligned}$$

Le rang de la matrice est donc égal à 2.

2. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(B) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3-2L_2\end{matrix}.\end{aligned}$$

Le rang de la matrice est donc égal à 3.

3. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(C) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-2&-2\\0&-2&-4&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3-2L_2\end{matrix}.\end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

4. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(D) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&2&-1\\0&1&2&-1\\0&-3&-6&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2+2L_1\\L_3-4L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3-L_2\\L_4+3L_2\end{matrix}.\end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

Correction de l'exercice 16 ▲

Il suffit de chercher les valeurs de α et β pour lesquelles le rang de cette matrice est 3. On calcule le rang par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(M_{\alpha,\beta}) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & \alpha & \beta\\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta\\ 0 & 4 & 2+\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2-2L_1\to L_2\\ L_3+L_1\to L_3\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & \alpha & \beta\\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta\\ 0 & 0 & 22-\alpha & 4-\beta\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ 7L_3+4L_2\to L_3\end{matrix}.\end{aligned}$$

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$.

Correction de l'exercice 17 ▲

On effectue les opérations suivantes :

$$L_2 - aL_1 \to L_2,\ L_3 - a^2L_1 \to L_3,\ L_4 - a^3L_1 \to L_4$$

et A a même rang que

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4\\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4)\\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4)\end{pmatrix}.$$

On échange ensuite L_2 et L_4 et on trouve que A a même rang que

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4)\\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4)\\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4\end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1-a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Correction de l'exercice 18 ▲

On va calculer la dimension du noyau de B. Notons m_i le nombre de colonnes de A_i et r_i le rang de A_i, pour $i = 1,\dots,n$. Notons E_i le noyau de A_i, qui est, par le théorème du rang, de dimension $m_i - r_i$. Soit $X = \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$.

Alors

$$BX = 0 \iff \forall i = 1,\dots,n,\ A_iX_i = 0 \iff \forall i = 1,\dots,n,\ X_i \in E_i.$$

On en déduit que $\ker B = E_1 \times \cdots \times E_n$ et donc

$$\begin{aligned}\dim(\ker(B)) &= \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)\\ &= (m_1 + \cdots + m_n) - (r_1 + \cdots + r_n).\end{aligned}$$

Appliquant à nouveau le théorème du rang, on trouve que

$$\operatorname{rg}(B) = (m_1 + \cdots + m_n) - \dim(\ker(B)) = r_1 + \cdots + r_n.$$

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit A une telle matrice. Alors A s'écrit

$$A = PJ_rQ,$$

où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et J_r est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ avec r fois le chiffre 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Alors,

$$J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$$

et donc $A = \sum_{i=1}^{r} A_i$ avec $A_i = PE_{i,i}Q$. Chaque A_i est de rang 1 (la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang). D'où le résultat.

Correction de l'exercice 20 ▲

Notons M une telle matrice. On désignera par f l'endomorphisme associé sur $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est M. Alors $\ker(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, puisque la matrice M n'est pas inversible, donc l'endomorphisme f n'est pas injectif. Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$. Alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$. Autrement dit, soit $\mathscr{B}_2 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de S. Alors $\mathscr{C}_1 = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Soit de plus $\mathscr{B}_1$ une base de $\ker(f)$ et posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$. Soit $\mathscr{C}$ une base obtenue à partir de $\mathscr{C}_1$ en appliquant le théorème de la base incomplète. Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{C}$ à l'arrivée à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix}.$$

Elle est donc nilpotente. Autrement dit, M est équivalente à une matrice nilpotente.

Correction de l'exercice 21 ▲

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est A. On a donc $u(e_1) = u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_2$. Alors,

1. Si on pose $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_3, e_2)$, alors la matrice de u dans $\mathscr{B}_1$ est B.
2. Si on pose $\mathscr{B}_2 = (e_2, e_3, e_1)$, alors la matrice de u dans $\mathscr{B}_2$ est C.
3. Si on pose $\mathscr{B}_3 = (e_3, \frac{1}{4}e_2, e_1)$ alors la matrice de u dans $\mathscr{B}_3$ est D.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Soit $u(x,y,z)$. Alors

$$\begin{aligned} u \in \ker(f - Id) &\iff (f - Id)(u) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= x \end{cases} \end{aligned}$$

Si on pose $u_1 = (1,1,1)$, alors on vient de prouver que $\ker(f - Id) = u_1$. De même, en résolvant l'équation $f(u) - 2u = 0$, puis l'équation $f(u) + 4u = 0$, on trouve respectivement $\mathrm{vect}(u_2) = \ker(f - 2Id)$ et $\mathrm{vect}(u_{-4}) = \ker(f + 4Id)$ avec $u_2 = (4,3,-2)$ et $u_{-4} = (2,-3,2)$.

2. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que c'est une famille libre, ce qui est laissé au lecteur.

3. Notons B la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_{-4}). Puisque $f(u_1) = u_1$, que $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_{-4}) = -4u_{-4}$, on a $B = D$. Ainsi, M et D représentent la même matrice dans des bases différentes. Elles sont donc semblables.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Si f est une homothétie, alors $(x, f(x))$ est bien toujours liée. Réciproquement, l'hypothèse nous dit, que pour tout x non-nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. On doit prouver qu'il existe un scalaire λ tel que $\lambda_x = \lambda$ pour tout x de E, ou encore que $\lambda_x = \lambda_y$ quels que soient x et y non-nuls. Si la famille (x,y) est liée, c'est clair, car $y = \mu x$ et $\mu\lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x$ et on peut simplifier par $\mu x \neq 0$. Si la famille (x,y) est libre, calculons $f(x+y)$. D'une part,

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y,$$

d'autre part,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Puisque la famille (x,y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$, ce qui est le résultat voulu.

2. On va raisonner par récurrence sur n, le résultat étant vrai si $n = 1$. Soit f l'application linéaire associée à M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si f est une homothétie, alors M est un multiple de l'identité et comme sa trace est nulle, c'est la matrice nulle. Sinon, soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, f(x))$ est libre. Alors on peut compléter cette famille en une base $(x, f(x), e_3, \ldots, e_n)$. Dans cette base, la matrice de f est

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \ldots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & N' & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$

Autrement dit, M est semblable à N. Puisque N est de trace nulle, N' est de trace nulle. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}N'Q$ soit une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Posons alors

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$

Alors, P est inversible, et on vérifie aisément que $P^{-1}NP$ est une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Ainsi, N, donc M, est semblable à une telle matrice.

Correction de l'exercice 24 ▲

La matrice $A \otimes B$ est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$. De plus, ses coefficients diagonaux sont constitués par :

les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{1,1}$ les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{2,2}$ $\vdots$ les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{n,n}$.

Donc ce sont les $a_{i,i}b_{j,j}$, pour $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots p$. On a donc

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,i}b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_{j,j}\right) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Notons $C = A^T$, $D = AA^T$ et cherchons quels sont les coefficients diagonaux de D. On a

$$D_{i,i} = \sum_{k=1} a_{i,k}c_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

On en déduit que

$$\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

On réalise une somme de termes positifs ou nuls, et on demande que la somme est nulle. Tous les termes sont donc nuls et on en déduit que, pour tout $i,k = 1,\dots,n$, on a $a_{i,k} = 0$, c'est-à-dire $A = 0$.

2. Une première preuve utilise la première question. En effet, l'égalité implique que $\mathrm{tr}((A-B)X) = 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Appliquant ceci avec $X = (A-B)^T$, on peut utiliser le résultat de la première question et en déduire que $A - B = 0$. On peut aussi donner une preuve directe. Calculons d'abord $AE_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec des 0 partout sauf le coefficient à la i-ème ligne et j-ième colonne qui est égal à 1. Alors,

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & 0 \\ \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

où la seule colonne non-nulle est la j-ième colonne. Le seul coefficient diagonal non nul est donc $a_{j,i}$, et on en déduit que

$$\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = \mathrm{tr}(BE_{i,j}) \implies a_{j,i} = b_{j,i}.$$

Comme i et j sont arbitraires dans $\{1,\dots,n\}$, on en déduit que $A = B$.